5. Armaduras

5.1.- Definición de armadura

Una estructura de barras unidas por sus extremos de manera que constituyan una unidad rígida recibe el nombre de armadura. Algunos ejemplos son los puentes, los soportes de cubiertas o las grúas.

Aquí nos limitaremos al estudio de armaduras planas, es decir, aquellas en que todos los miembros que la forman se encuentran en un mismo plano. Entonces, consideramos que todas las fuerzas están en el plano *xy*, y que los momentos de las fuerzas están en la dirección *z*. Ésto nos permite omitir el carácter vectorial en las ecuaciones del equilibrio, que quedan reducidas a tres: la suma de las componentes *x* e *y* de las fuerzas, junto con la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a algún punto de la armadura.

También suponemos que las armaduras son estructuras estáticamente determinadas o isostáticas: que solamente tienen las ligaduras necesarias para mantener el equilibrio.

El objetivo será la determinación de las fuerzas internas en la armadura, es decir, las fuerzas de acción y reacción entre los elementos o barras que la forman. Nos basaremos en la hipótesis de que todos los miembros de una armadura son miembros de dos fuerzas, es decir, que cada uno se encuentra en equilibrio bajo la acción de dos únicas fuerzas, aplicadas en sus extremos, que serán iguales, opuestas y colineales. Para ello, tendremos en cuenta que todas las fuerzas externas deben aplicarse en las uniones entre las barras (en los nudos).

5.2.- Método de los nudos

Las ecuaciones del equilibrio se aplican a los pasadores de las uniones. En cada nudo se consideran las fuerzas externas aplicadas junto con las fuerzas de reacción correspondientes a las fuerzas internas en las barras.

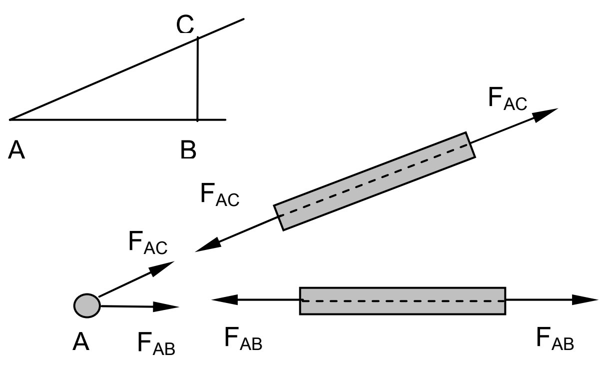

Figura 5.1

Dado que las fuerzas son concurrentes, no hay que considerar la suma de momentos sino sólo la suma de componentes *x* e *y* de las fuerzas. Estas ecuaciones se aplican en primer lugar a un nudo que contenga sólo dos incógnitas y después se van aplicando a los demás nudos, sucesivamente.

Convencionalmente, se consideran positivas las fuerzas internas en las barras cuando salen hacia afuera (tracción) y negativas si van hacia el interior (compresión).

5.3.- Barras de fuerza nula

Las barras de fuerza nula son aquellas en que las fuerzas internas son cero. En algunos casos se pueden identificar sin necesidad de realizar ningún cálculo, como por ejemplo en las uniones con forma de T (Figura 5.2). En este tipo de uniones tenemos dos barras en la misma dirección y una tercera barra formando un ángulo α con la dirección de las otras dos.

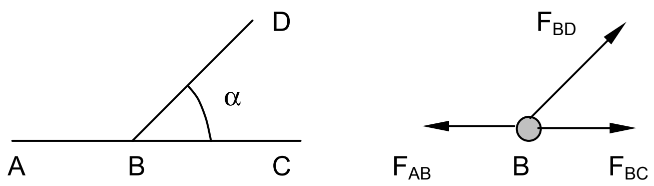

Figura 5.2

Al analizar el nudo de la unión, encontraremos dos fuerzas en la misma dirección y con sentidos opuestos, y una tercera fuerza formando un ángulo α con la dirección de las otras dos. No debe haber más fuerzas aplicadas en el nudo considerado.

Mediante las ecuaciones del equilibrio podemos comprobar que, en este caso, la tercera fuerza debe ser nula.

$\Sigma F_x = - F_{AB} + F_{BC} + F_{BD} \times \cos\alpha = 0$

$\Sigma F_y = F_{BD} \times \text{sen}\alpha = 0$

de donde

$F_{BD} = 0 / \text{sen}\alpha$.

Como senα es distinto de cero, F_{BD} debe ser nula y la barra BD es una barra de fuerza nula.

5.4.- Método de las secciones

Las ecuaciones del equilibrio se aplican a una parte de la armadura. Se corta la armadura por las barras cuya fuerza nos pide el problema, o por las barras más próximas a ellas.

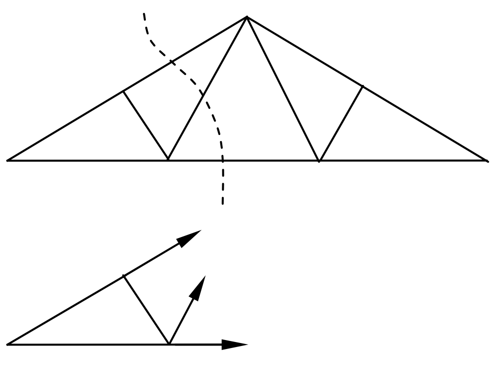

Figura 5.3

En el diagrama de sólido libre de la sección considerada se tienen en cuenta las fuerzas externas aplicadas en esa parte de la armadura, y las reacciones correspondientes a las fuerzas internas de las barras que se han partido.

En este caso sí hace falta considerar las tres ecuaciones del equilibrio: la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a algún punto, junto con la suma de componentes *x* e *y* de las fuerzas.

Debe tenerse en cuenta que si se cortasen más de tres barras tendríamos más de tres incógnitas, y no sería posible resolver el problema sólo con las ecuaciones del equilibrio.

5.5.- Problemas resueltos

Problema 5.1

Considerar la armadura de la Figura 5.4. Determinar la fuerza en cada miembro mediante el método de los nudos, cuando F = 5 kN y la distancia AC es de 3 m.

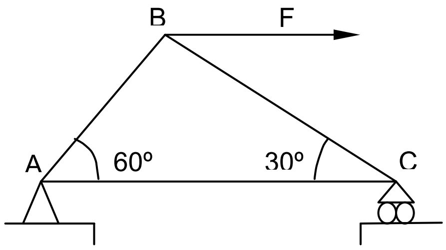

Figura 5.4

Solución

1) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa (Figura 5.5), para encontrar las reacciones en los apoyos mediante las ecuaciones del equilibrio.

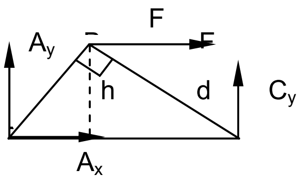

Figura 5.5

$\Sigma F_x = A_x + F = 0$
$\Sigma F_y = A_y + C_y = 0$
$\Sigma M_A = (3\ m) \times C_y - h \times F = 0$
$A_x = - F = - 5\ kN$
$A_y = - C_y$
y la altura del triángulo (h) se puede obtener por trigonometría:
$d = (3\ m) \times \cos 30º = 2.598\ m$
$h = d \times \text{sen}30º = 1.299\ m$
$\Sigma M_A = (3\ m) \times C_y - (1.299\ m) \times (5\ kN) = 0$
$C_y = (1.299\ m) \times (5\ kN) / (3\ m) = 2.165\ kN$
$A_y = - 2.165\ kN$.

2) Con estos datos, podemos separar las barras y los pasadores, aplicando las ecuaciones del equilibrio a cada nudo (pasador).

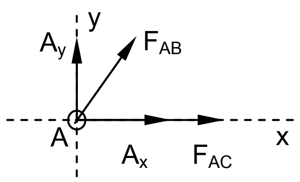

Figura 5.6

Para el nudo A (Figura 5.6) tendremos:

$\Sigma F_x = A_x + F_{AC} + F_{AB} \times \cos 60º = 0$
$\Sigma F_y = A_y + F_{AB} \times \text{sen}60º = 0$

de donde
$F_{AB} = - A_y / \text{sen}60º = 2.165\ kN / 0.866 = 2.5\ kN$
$F_{AC} = - A_x - F_{AB} \times \cos 60º = 5\ kN - ((2.5\ kN) \times \cos 60º) = 3.75\ kN$
Sólo falta calcular la fuerza interna en la barra BC para lo cual analizamos otro de los nudos, por ejemplo el nudo C (Figura 5.7):

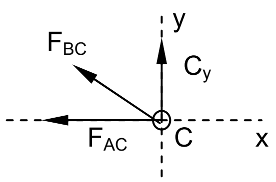

Figura 5.7

$\Sigma F_x = - F_{AC} - F_{BC} \times \cos 30º = 0,$
$\Sigma F_y = C_y + F_{BC} \times \text{sen}30º = 0$

de donde
$F_{BC} = -F_{AC} / \cos 30º = -3.75kN / 0.866 = - 4.33\ kN$
Con ésto ya tenemos las fuerzas internas en las tres barras que forman la armadura. Podríamos utilizar el nudo B para comprobar los resultados.

3) Los resultados obtenidos son:
F_{AB} = 2.5 kN (tracción)
F_{AC} = 3.75 kN (tracción)
F_{BC} = – 4.33 kN (compresión).

Problema 5.2

Para la armadura de la Figura 5.8, hallar la fuerza en las barras AD, DE y EC, por el método de los nudos, cuando F_1 = 6 kN, F_2 = 4 kN y cada barra mide 5 m.

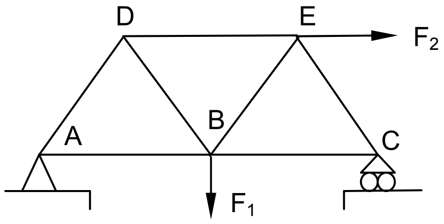

Figura 5.8

Solución

1) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa (Figura 5.9), para encontrar las reacciones en los apoyos.

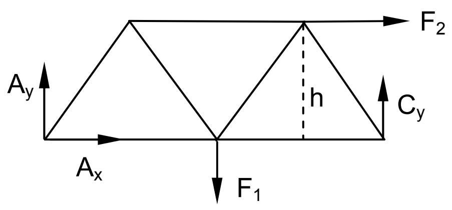

Figura 5.9

$\Sigma F_x = A_x + F_2 = 0$
$\Sigma F_y = A_y + C_y - F_1 = 0$
$\Sigma M_A = (10m) \times C_y - (5m) \times F_1 - h \times F_2 = 0$

de donde,
$A_x = - F_2 = - 4$ kN
y la altura del triángulo (h) se puede obtener por trigonometría:
h = (5 m) x sen60º = 4.33 m.

$\Sigma M_A = (10\text{ m}) \times C_y - (5\text{ m}) \times (6\text{ kN}) - (4.33\text{ m}) \times (4\text{ kN}) = 0$
$C_y = ((5\text{ m}) \times (6\text{ kN}) + (4.33\text{ m}) \times (4\text{ kN})) / (10\text{ m}) = 4.732$ kN
$A_y = - C_y + F_1 = - 4.732\text{ kN} + 6\text{ kN} = 1.268$ kN

2) Con estos datos, podemos separar las barras y los pasadores, aplicando las ecuaciones del equilibrio a cada nudo (pasador).
Para el nudo A (Figura 5.10) tendremos:

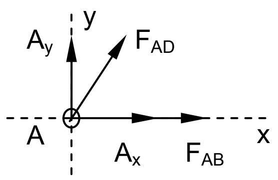

Figura 5.10

$\Sigma F_x = A_x + F_{AB} + F_{AD} \times \cos 60º = 0$
$\Sigma F_y = A_y + F_{AD} \times \text{sen}60º = 0$

de donde

$F_{AD} = -A_y / \text{sen}60º = -1.268\text{ kN} / 0.866 = - 1.464$ kN
$F_{AB} = - A_x - F_{AD} \times \cos 60º = 4\text{ kN} + (1.464\text{ kN}) \times \cos 60º = 4.732$ kN.

A continuación tomamos otro nudo para aplicar las ecuaciones del equilibrio.
El nudo B tendría tres fuerzas desconocidas, como tenemos sólo dos ecuaciones no sería posible encontrar sus valores. Con el nudo D no existe ese problema ya que las incógnitas son sólo dos (Figura 5.11).

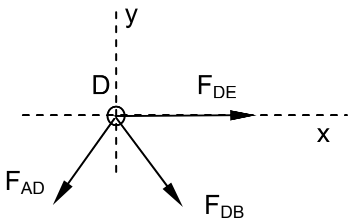

Figura 5.11

$\Sigma F_x = -F_{AD} \times \cos 60^\circ + F_{DB} \times \cos 60^\circ + F_{DE} = 0$
$\Sigma F_y = -F_{AD} \times \operatorname{sen} 60^\circ - F_{DB} \times \operatorname{sen} 60^\circ = 0$

de donde
$F_{DB} = -F_{AD} \times \operatorname{sen} 60^\circ / \operatorname{sen} 60^\circ = 1.464$ kN
$F_{DE} = F_{AD} \times \cos 60^\circ - F_{DB} \times \cos 60^\circ =$
$= (-1.464\text{kN} - 1.464\text{kN}) \times \cos 60^\circ = -1.464$ kN

Con ésto ya tenemos las fuerzas en dos de las barras que nos pedía el problema (AD y DE), para encontrar la fuerza en la tercera barra (EC) podemos usar tanto el nudo E como el nudo C pues en ambos casos tendríamos dos incógnitas.
Tomemos, por ejemplo, el nudo C (Figura 5.12).

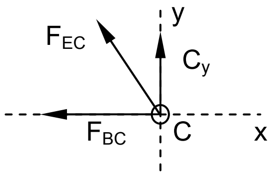

Figura 5.12

$\Sigma F_x = -F_{BC} - F_{EC} \times \cos 60^\circ = 0$
$\Sigma F_y = C_y + F_{EC} \times \operatorname{sen} 60^\circ = 0$

de donde
$F_{EC} = -C_y / \operatorname{sen} 60^\circ = -4.732$ kN / 0.866 = – 5.464 kN
Y no hace falta calcular la fuerza F_{BC} ya que no lo pedía el problema.

3) Los resultados obtenidos son:
$F_{AD} = -1.464$ kN (compresión)
$F_{DE} = -1.464$ kN (compresión)
$F_{EC} = -5.464$ kN (compresión).

Problema 5.3

Identificar todos los miembros de fuerza nula de la armadura de la Figura 5.13, razonando la respuesta.

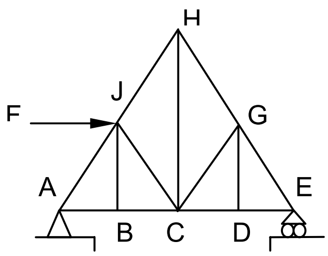

Figura 5.13

Solución

1) Observando la armadura podemos ver que los nudos B y D presentan uniones en forma de T sin fuerzas externas aplicadas.
Podemos deducir que las barras BJ y DG serán barras de fuerza nula.
Para comprobarlo, separamos uno de los nudos, por ejemplo el nudo B (Figura 5.14), y planteamos las ecuaciones del equilibrio correspondientes.

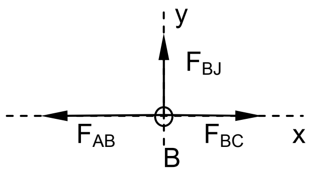

Figura 5.14

$\Sigma F_x = -F_{AB} + F_{BC} = 0$
$\Sigma F_y = F_{BJ} = 0$

Como no hay ninguna otra fuerza en la dirección *y*, la fuerza F_{BJ} tiene que ser nula, y la barra BJ es de fuerza nula.
Lo mismo sucede con el nudo D y, por tanto, la barra DG es de fuerza nula.

2) Al tener en cuenta que la barra DG es de fuerza nula, vemos que en el nudo G volvemos a encontrar una unión en T. Para verlo más fácilmente, podemos tomar como eje *x* la dirección de las dos fuerzas opuestas (Figura 5.15).

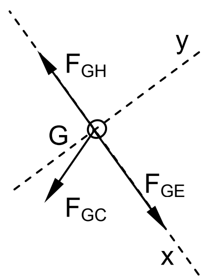

Figura 5.15

$\Sigma F_x = F_{GE} - F_{GH} + F_{GC} \times \cos\alpha = 0$
$\Sigma F_y = - F_{GC} \times \text{sen}\alpha = 0.$

$F_{GC} = 0 / \text{sen}\alpha$
Ya que senα es distinto de cero, F_{GC} debe ser nula y la barra GC es una barra de fuerza nula.

En el nudo J la situación es diferente, ya que hay una fuerza externa aplicada, F. Al hacer la suma de componentes *y* tendremos más contribuciones, por lo que la barra JC no será de fuerza nula.

3) Las barras de fuerza nula encontradas son BJ, DG y GC.

Problema 5.4

Identificar todos los miembros de fuerza nula de la armadura de la Figura 5.16, razonando la respuesta.

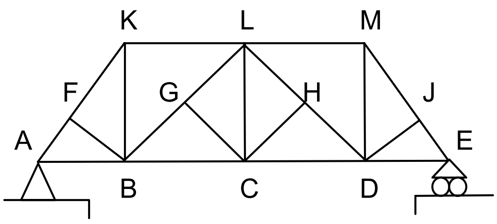

Figura 5.16

Solución

1) Observando la armadura, buscaremos los nudos que unan tres barras, presentando uniones en forma de T, sin fuerzas externas aplicadas.

Para este caso, los nudos que cumplen los requisitos son: F, G, H, J. Podemos deducir entonces que las barras FB, GC, HC y JD serán barras de fuerza nula, de acuerdo con el razonamiento del problema anterior. Una vez eliminadas estas barras, podemos ver que también la barra LC es de fuerza nula.

Problema 5.5

Para la armadura de la Figura 5.17, hallar la fuerza en las barras LM, CD y HD, mediante el método de las secciones, cuando F_1 = 6 kN, F_2 = 4 kN y las longitudes de las barras son:

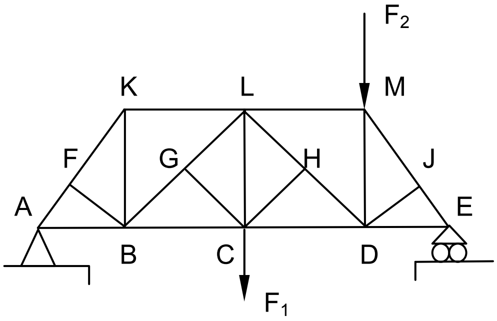

Figura 5.17

AB, DE, 3 m
BC, CD, KL, LM, 5 m
BK, CL, DM, 5 m.

Solución

1) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa (Figura 5.18), para encontrar las reacciones en los apoyos.

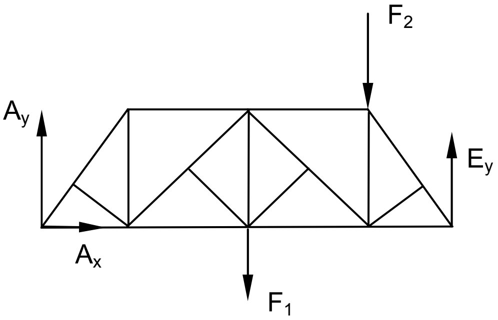

Figura 5.18

$\Sigma F_x = A_x = 0$
$\Sigma F_y = A_y + E_y - F_1 - F_2 = 0$
$\Sigma M_A = (16m) \times E_y - (8m) \times F_1 -$
$- (13 \text{ m}) \times F_2 = 0$

$(16 \text{ m}) \times E_y = (8 \text{ m}) \times (6 \text{ kN}) +$
$+ (13 \text{ m}) \times (4 \text{ kN}) = 100 \text{ kN m}$
$E_y = 100 \text{ kNm} / 16 \text{ m} = 6.25 \text{ kN}$
$A_y = - E_y + F_1 + F_2 =$
$= - 6.25 \text{ kN} + 6 \text{ kN} + 4 \text{ kN} = 3.75 \text{ kN}$

2) Una vez obtenidas las reacciones en los apoyos, cortamos la armadura por las barras cuya fuerza nos pide el problema, o por las más próximas a ellas (Figura 5.19).

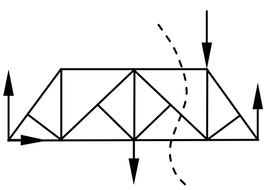
Figura 5.19

A continuación, dibujamos el diagrama de sólido libre de la sección de armadura que nos interesa (Figura 5.20).

$\Sigma F_x = - F_{CD} - F_{LM} - F_{HD} \times \cos\alpha = 0$
$\Sigma F_y = E_y - F_2 + F_{HD} \times \text{sen}\alpha = 0$
$\Sigma M_D = (5 \text{ m}) \times F_{LM} + (3 \text{ m}) \times E_y = 0$

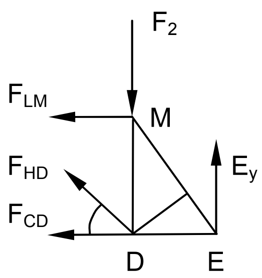

Figura 5.20

El ángulo α se puede obtener por geometría: como las barras LM y MD miden lo mismo (5 m), el ángulo tiene que ser de 45º.

De la segunda ecuación ya se puede obtener una de las fuerzas.
$F_{HD} = (F_2 - E_y) / \text{sen}45º = (4 - 6.25) \text{ kN} / 0.707 =$
$= - 2.25 \text{ kN} / 0.707 = - 3.182 \text{ kN}$

De la ecuación de los momentos obtenemos otra de las fuerzas.
$F_{LM} = - (3 \text{ m}) \times E_y / 5 \text{ m} = - (3 \text{ m}) \times (6.25 \text{ kN}) / 5 \text{ m} = - 3.75 \text{ kN}$
de donde,
$F_{CD} = - F_{LM} - F_{HD} \times \cos45º = 3.75 \text{ kN} + (3.182 \text{ kN}) \times \cos45º = 6 \text{ kN}$

Podemos comprobar los resultados tomando la otra parte de la armadura (Figura 5.21) y aplicando una de las ecuaciones del equilibrio. Dado que la barra CH es de fuerza nula, la fuerza en la barra LH es igual a la fuerza en HD.

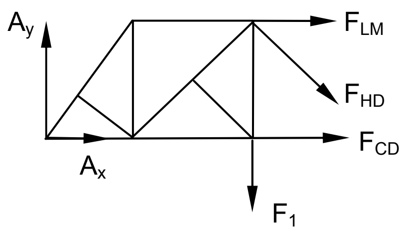

Figura 5.21

$\Sigma F_y = A_y - F_1 - F_{HD} \times \text{sen}\alpha = (3.75 - 6 + 2.25)$ kN = 0

vemos que la igualdad se cumple.

También podemos comprobarlo con otra de las ecuaciones:

$\Sigma M_L = (5\text{ m}) \times F_{CD} + (5\text{ m}) \times A_x - (8\text{ m}) \times A_y = (5\text{ m}) \times 6\text{ kN} - (8\text{ m}) \times 3.75\text{ kN} = 0$

Como queríamos comprobar.

3) Los resultados obtenidos son:

$F_{LM} = -3.75$ kN (compresión)

$F_{CD} = 6$ kN (tracción)

$F_{HD} = -3.182$ kN (compresión).

Problema 5.6

Para la armadura de la Figura 5.22, hallar la fuerza en las barras BC, BF y FC, mediante el método de las secciones, cuando F_1 = 6 kN, F_2 = 4 kN y la longitud de cada una de las barras es de 5 m.

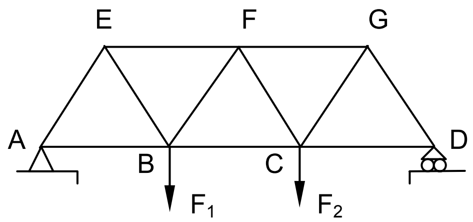

Figura 5.22

Solución

1) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa (Figura 5.23), para encontrar las reacciones en los apoyos.

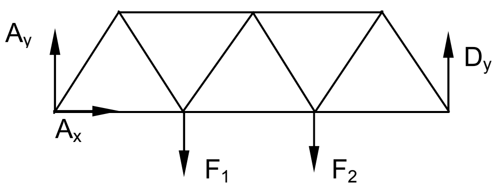

Figura 5.23

$\Sigma F_x = A_x = 0$

$\Sigma F_y = A_y + D_y - F_1 - F_2 = 0,$

$\Sigma M_A = (15\text{m}) \times D_y - (5\text{m}) \times F_1 - (10\text{m}) \times F_2 = 0$

$(15\text{ m}) \times D_y =$

$= (5\text{ m}) \times (6\text{ kN}) + (10\text{ m}) \times (4\text{ kN}) = 70\text{ kN m}$

$D_y = 70\text{ kN m} / 15\text{ m} = 4.667$ kN

$A_y = -D_y + F_1 + F_2 = -4.667\text{ kN} + 6\text{ kN} + 4\text{ kN} = 5.333$ kN

2) Una vez obtenidas las reacciones en los apoyos, cortamos la armadura por las barras cuya fuerza nos pide el problema (Figura 5.24), o por las más próximas a ellas.

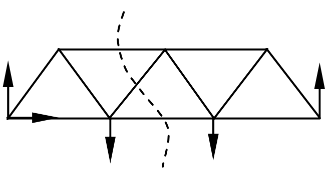

Figura 5.24

A continuación, dibujamos el diagrama de sólido libre de la sección de armadura que nos interesa (Figura 5.25).

Los ángulos son todos de 60º por ser todos los triángulos equiláteros.

$\Sigma F_x = A_x + F_{EF} + F_{BC} + F_{BF} \times \cos 60º = 0$
$\Sigma F_y = A_y - F_1 + F_{BF} \times \text{sen}60º = 0$
$\Sigma M_B = - h \times F_{EF} - (5 \text{ m}) \times A_y = 0$

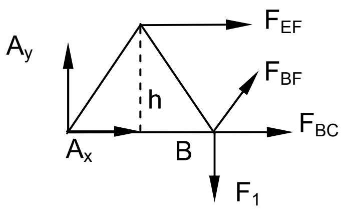

Figura 5.25

la altura del triángulo (h) se puede obtener por trigonometría:
$h = (5 \text{ m}) \times \text{sen}60º = 4.33 \text{ m}.$

$\Sigma M_B = - (4.33 \text{ m}) \times F_{EF} - (5 \text{ m}) \times (5.333 \text{ kN}) = 0$

$F_{EF} = - 26.665 \text{ kN m} / 4.33 \text{ m} = - 6.158 \text{ kN}$
$F_{BF} = (- A_y + F_1) / \text{sen}60º = (- 5.333 \text{ kN} + 6 \text{ kN}) / 0.866 = 0.770 \text{ kN}$
$F_{BC} = - A_x - F_{EF} - F_{BF} \times \cos 60º = 6.158 \text{ kN} - (0.770 \text{ kN}) \times 0.5 = 5.773 \text{ kN}$

Con ésto ya tenemos dos (F_{BF}, F_{BC}) de las tres fuerzas que nos pedía el problema. Para calcular la fuerza que falta (F_{FC}) tenemos que utilizar uno de los nudos próximos al corte de la armadura, el nudo F (Figura 5.26).

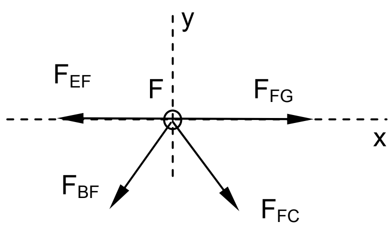

Figura 5.26

$\Sigma F_x = - F_{EF} - F_{BF} \times \cos 60º + F_{FC} \times \cos 60º + F_{FG} = 0$
$\Sigma F_y = - F_{BF} \times \text{sen}60º - F_{FC} \times \text{sen}60º = 0$

de donde
$F_{FC} = - F_{BF} \times \text{sen}60º / \text{sen}60º = - 0.770 \text{ kN}$

Podemos comprobar los resultados tomando la otra parte de la armadura (Figura 5.27) y aplicando una de las ecuaciones del equilibrio.

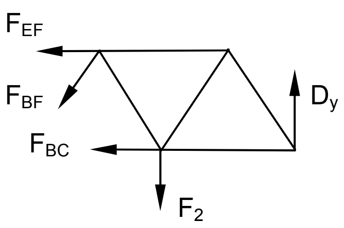

Figura 5.27

$\Sigma F_y = - F_{BF} \times \text{sen}60º - F_2 + D_y =$
$= - (0.770 \text{ kN}) \times 0.866 - 4 \text{ kN} + 4.667 \text{ kN} = 0$

o también,
$\Sigma M_F = - h \times F_{BC} - (2.5\text{m}) \times F_2 + (7.5\text{m}) \times D_y =$
$= - (4.33\text{m}) \times (5.773 \text{ kN}) - (2.5 \text{ m}) \times (4 \text{ kN}) +$
$+ (7.5 \text{ m}) \times (4.667 \text{ kN}) = 0$

Como queríamos comprobar.

3) Los resultados obtenidos son:
$F_{BF} = 0.770$ kN (tracción)
$F_{BC} = 5.773$ kN (tracción)
$F_{FC} = - 0.770$ kN (compresión).

Problema 5.7

Para la armadura de la Figura 5.28, hallar la fuerza en las barras BC, BG, BF y FG, mediante el método de las secciones, considerando los datos siguientes:

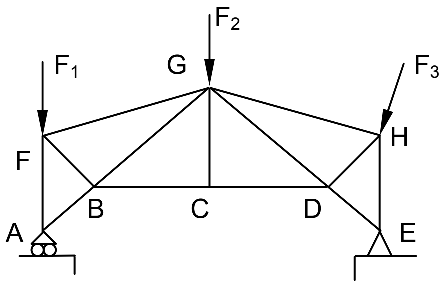

Figura 5.28

F_1 = 5 kN
F_2 = 4 kN
F_3 = 10 kN.

La longitud de las barras BC, CD, CG es de 4 m.

Las barras AB, BF, DE, DH tienen la misma longitud.

Los ángulos FGB y DGH que forman las barras FG-BG y DG-GH, respectivamente, son de 30º.

Solución

1) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa, para encontrar las reacciones en los apoyos (Figura 5.29).

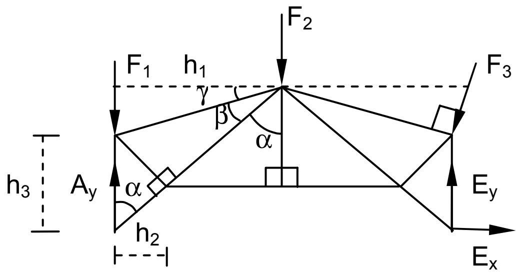

Figura 5.29

Los ángulos α, β, y γ son datos del problema: Si las barras BC-CG y AB-BF son iguales y forman un ángulo recto, α será de 45º. El ángulo β es de 30º. Y el ángulo γ será la diferencia 90º-(α+β), es decir, 15º.

El ángulo que forma la fuerza F_3 con la horizontal será de 90º-15º, es decir de 75º.

$\Sigma F_x = E_x - F_3 \times \cos 75º = 0$
$\Sigma F_y = A_y + E_y - F_1 - F_2 - F_3 \times \text{sen}75º = 0$
$\Sigma M_E = 2h_1 \times (F_1 - A_y) + h_1 \times F_2 + h_3 \times (F_3 \times \cos 75º) = 0$

Para resolver las ecuaciones del equilibrio necesitamos calcular primero algunas distancias (Figura 5.30).

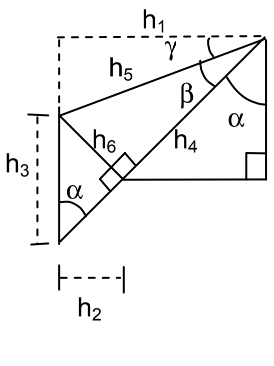

Figura 5.30

h_4 = (4 m) / cos45º = (4 m) / 0.707 = 5.658 m
$h_5 = h_4$ / cos30º = (5.658 m) / 0.866 = 6.533 m
$h_6 = h_5$ x sen30º = (6.533 m) x 0.5 = 3.266 m
$h_2 = h_6$ x sen45º = (3.266 m) x 0.707 = 2.309 m
$h_3 = 2h_2$ = 2 x (2.309 m) = 4.618 m
$h_1 = h_2$ + (4 m) = (2.309 m) + (4 m) = 6.309 m

comprobamos:
$h_1 = h_5$ x cos15º = (6.533 m) x 0.966 = 6.31 m
$h_3 = h_1 - (h_5$ x sen15º) =
(6.309 m) – (6.533 m x 0.259) = 4.617 m

La igualdad se cumple con una precisión de la tercera cifra decimal. Ahora ya podemos resolver las ecuaciones del equilibrio planteadas antes.

$2h_1 \times (F_1 - A_y) + h_1 \times F_2 + h_3 \times (F_3 \times \cos 75º) = 0$
$h_1 \times (2F_1 + F_2) + h_3 \times (F_3 \times \cos 75º) = 2h_1 \times A_y$
$(6.309 \text{ m}) \times ((2 \times 5\text{kN}) + (4 \text{ kN})) + (4.618\text{m}) \times (10 \text{ kN} \times 0.259) = (6.309 \text{ m}) \times 2A_y$
$(88.326 \text{ kN m}) + (11.961 \text{ kN m}) = (6.309 \text{ m}) \times 2A_y$

$A_y = 100.287 \text{ kN m} / 12.618 \text{ m} = 7.948 \text{ kN}$
$E_y = F_1 + F_2 + (F_3 \times \text{sen}75º) - A_y =$
$= (5 \text{ kN}) + (4 \text{ kN}) + (10 \text{ kN} \times 0.966) - 7.948 \text{ kN} = 10.712 \text{ kN}$
$E_x = F_3 \times \cos 75º = (10 \text{ kN}) \times 0.259 = 2.59 \text{ kN}$

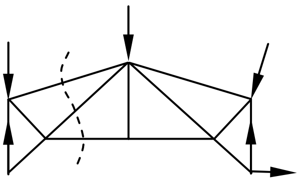

Figura 5.31

2) Una vez obtenidas las reacciones en los apoyos, cortamos la armadura por las barras cuya fuerza nos pide el problema, o por las más próximas a ellas (Figura 5.31).

A continuación, dibujamos el diagrama de sólido libre de la sección de la armadura que nos interesa (Figura 5.32).

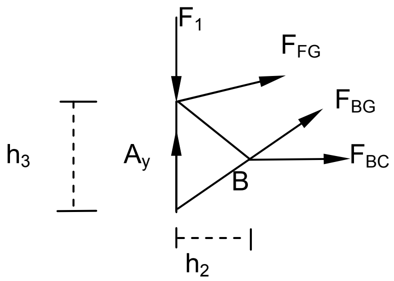

Figura 5.32

$\Sigma F_x = F_{BC} + F_{BG} \times \cos 45º + F_{FG} \times \cos 15º = 0$
$\Sigma F_y = A_y - F_1 + F_{BG} \times \text{sen}45º + F_{FG} \times \text{sen}15º = 0$
$\Sigma M_B = h_2 \times (F_1 - A_y - F_{FG} \times \text{sen}15º) -$
$- (h_3/2) \times F_{FG} \times \cos 15º = 0$

de donde,
$h_2 \times (F_1 - A_y - F_{FG} \times \text{sen}15º - F_{FG} \times \cos 15º) = 0$
$F_{FG} \times (\text{sen}15º + \cos 15º) = F_1 - A_y$
$F_{FG} = (F_1 - A_y) / (\text{sen}15º + \cos 15º)$
$F_{FG} = (5 \text{ kN} - 7.948 \text{ kN}) / (0.259 + 0.966) =$
$= (-2.948 \text{ kN}) / 1.225 = -2.407 \text{ kN}$

$F_{BG} = (F_1 - A_y - F_{FG} \times \text{sen}15º) / \text{sen}45º =$
$= (5 \text{ kN} - 7.948 \text{ kN} + (2.407 \text{ kN} \times 0.259)) / 0.707 = -2.325\text{kN} / 0.707 = -3.289 \text{ kN}$
$F_{BC} = -F_{BG} \times \cos 45º - F_{FG} \times \cos 15º =$
$= (3.289 \text{ kN} \times 0.707) + (2.407 \text{ kN} \times 0.966) = 2.325 + 2.325 = 4.650 \text{ kN}$

Para calcular la fuerza que falta (F_{BF}) tenemos que utilizar uno de los nudos próximos al corte de la armadura, el nudo B o el nudo F.
Tomamos, por ejemplo, el nudo B (Figura 5.33).

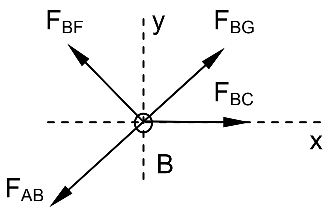

Figura 5.33

$\Sigma F_x = F_{BC} + F_{BG} \times \cos 45º - F_{BF} \times \cos 45º -$
$- F_{AB} \times \cos 45º = 0$
$\Sigma F_y = F_{BG} \times \text{sen}45º + F_{BF} \times \text{sen}45º -$
$- F_{AB} \times \text{sen}45º = 0$

de donde
$\text{sen}45º \times (F_{BG} + F_{BF} - F_{AB}) = 0$
$F_{BG} + F_{BF} - F_{AB} = 0$

$-3.289 \text{ kN} = -F_{BF} + F_{AB}$
$F_{BC} + F_{BG} \times \cos 45º = F_{BF} \times \cos 45º + F_{AB} \times \cos 45º$
$4.650 \text{ kN} + (-3.289 \text{ kN} \times 0.707) = (F_{BF} + F_{AB}) \times 0.707$

2.325 kN / 0.707 = 3.289 kN = $F_{BF} + F_{AB}$
con lo que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:
3.289 kN = $F_{BF} + F_{AB}$
3.289 kN = $F_{BF} – F_{AB}$
sumando las dos ecuaciones,
3.289 kN + 3.289 kN = 2 x F_{BF}
F_{BF} = 3.289 kN

Podemos comprobarlo aplicando una de las ecuaciones del equilibrio al otro nudo, el F (Figura 5.34),.

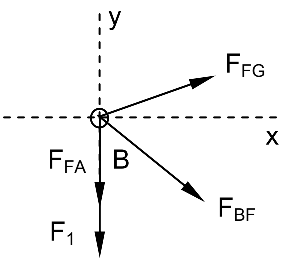

Figura 5.34

$\Sigma F_x = F_{FG}$ x cos15º + F_{BF} x cos45º =
= (– 2.407 kN) x 0.966 + (3.289 kN) x 0.707 =
= – 2.325 + 2.325 = 0
Como queríamos comprobar.

3) Los resultados obtenidos son:
F_{BC} = 4.650 kN (tracción)
F_{BG} = – 3.289 kN (compresión)
F_{BF} = 3.289 kN (tracción)
F_{FG} = – 2.407 kN (compresión)

Problema 5.8

Para la armadura de la Figura 5.35, hallar la fuerza en cada barra por el método de los nudos, considerando los datos siguientes:
F_1 = 5 kN
F_2 = 4 kN
F_3 = 10 kN.
La longitud de las barras AB, BC, CD, BD es de 4 m.
El ángulo DAB que forman las barras AD y AB es de 30º.

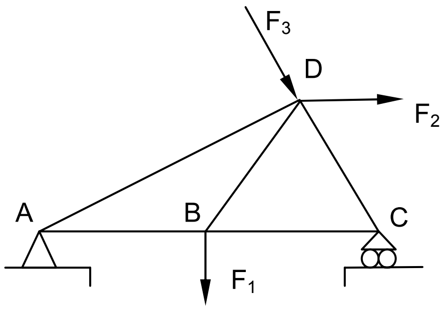

Figura 5.35

Solución

1) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa, para encontrar las reacciones en los apoyos (Figura 5.36).

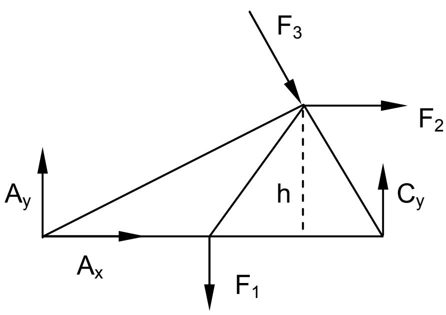

Figura 5.36

$\Sigma F_x = A_x + F_2 + (F_3$ x cos60º) = 0
$\Sigma F_y = A_y + C_y – F_1 – (F_3$ x sen60º) = 0
ΣM_A = (8 m) x C_y – (4 m) x F_1 –
– h x ($F_2 + F_3$ x cos60º) – (6 m) x (F_3 x sen60º) =
= 0

de donde,

$A_x = – F_2 – (F_3 \text{ x } \cos60^o) = – 4 \text{ kN} – (10 \text{ kN x } 0.5) = – 9 \text{ kN}$
y la altura del triángulo (h) se puede obtener por trigonometría:
$h = (4 \text{ m}) \text{ x } \text{sen}60^o = 3.464 \text{ m}.$

$\Sigma M_A = (8 \text{ m}) \text{ x } C_y – (4 \text{ m}) \text{ x } (5 \text{ kN}) – (3.464 \text{ m}) \text{ x } (4 \text{ kN} + (10 \text{ kN x } 0.5)) –$
$– (6 \text{ m}) \text{ x } (10 \text{ kN x } 0.866) = 0$
$(8 \text{ m}) \text{ x } C_y = 103.136 \text{ kN m}$
$C_y = 103.136 \text{ kN m} / 8 \text{ m} = 12.892 \text{ kN}$
$A_y = – C_y + F_1 + (F_3 \text{ x sen}60^o) = – 12.892 \text{ kN} + 5 \text{ kN} + (10 \text{ kN x } 0.866) = 0.768 \text{ kN}$

2) Con estos datos, podemos separar las barras y los pasadores, aplicando las ecuaciones del equilibrio a cada nudo.

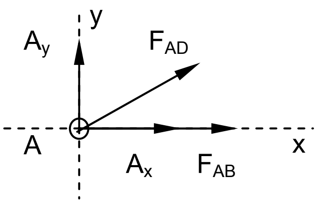

Figura 5.37

Para el nudo A (Figura 5.37) tendremos:

$\Sigma F_x = A_x + F_{AB} + F_{AD} \text{ x } \cos30^o = 0$
$\Sigma F_y = A_y + F_{AD} \text{ x sen}30^o = 0$

de donde
$F_{AD} = –A_y /\text{sen}30^o = –0.768 \text{ kN} / 0.5 = – 1.536 \text{ kN}$
$F_{AB} = – A_x – F_{AD} \text{ x } \cos30^o = 9 \text{ kN} + ((1.536 \text{ kN}) \text{ x } 0.866) = 10.330 \text{ kN}$
A continuación tomamos otro nudo para aplicar las ecuaciones del equilibrio.
Tomamos, por ejemplo, el nudo B (Figura 5.38).

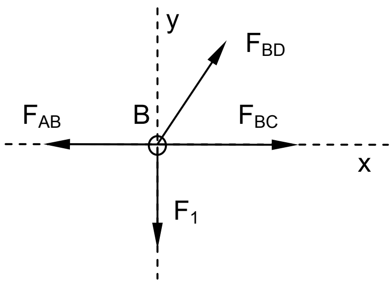

Figura 5.38

$\Sigma F_x = – F_{AB} + (F_{BD} \text{ x } \cos60^o) + F_{BC} = 0$
$\Sigma F_y = – F_1 + (F_{BD} \text{ x sen}60^o) = 0$

de donde
$F_{BD} = F_1 / \text{sen}60^o = 5 \text{ kN} / 0.866 = 5.774 \text{ kN}$
$F_{BC} = F_{AB} – (F_{BD} \text{ x } \cos60^o) =$
$= 10.330 \text{ kN} – (5.774 \text{ kN x } 0.5) = 7.443 \text{ kN}$

Para calcular la fuerza que falta podemos usar tanto el nudo C como el nudo D. Tomemos el nudo C (Figura 5.39).

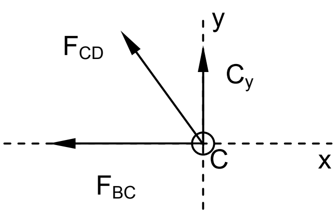

Figura 5.39

$\Sigma F_x = – F_{BC} – F_{CD} \text{ x } \cos60^o = 0$
$\Sigma F_y = C_y + F_{CD} \text{ x sen}60^o = 0$

de donde
$F_{CD} = – C_y / \text{sen}60^o = – 12.892 \text{ kN} / 0.866 = – 14.887 \text{ kN}$
Con ésta ya tenemos todas las fuerzas en las barras de la armadura.

Podemos usar la primera ecuación para comprobar los resultados,
$– F_{BC} – F_{CD} \text{ x } \cos60^o = – 7.443 \text{ kN} + (14.887 \text{ kN x } 0.5) = 0$
También podríamos comprobarlos mediante las ecuaciones del nudo que no hemos usado, el nudo D.

3) Los resultados obtenidos son:
F_{AB} = 10.330 kN (tracción)
F_{AD} = – 1.536 kN (compresión)
F_{BC} = 7.443 kN (tracción)
F_{BD} = 5.774 kN (tracción)
F_{CD} = – 14.887 kN (compresión)

Problema 5.9

Para la armadura "Baltimore" de la Figura 5.40, indicar cuáles son las barras de fuerza nula, y hallar la fuerza en las barras KL, KT y JK. Considerar los datos siguientes: F_1 = 5 kN, F_2 = 10 kN. Los triángulos ACZA, CEaC, ..., ÑPQÑ son equiláteros de 2 m de lado, y los triángulos AEYA y MPRM también son equiláteros, de 4 m de lado.

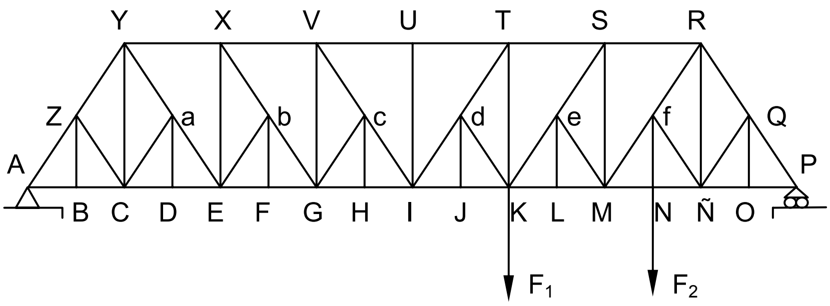

Figura 5.40

Solución

1) Primero buscamos las barras de fuerza nula. Para ello, buscamos uniones en forma de T, sin fuerzas externas aplicadas.
En este caso, tenemos uniones de este tipo en los nudos B, D, F, H, J, L, y O. El nudo N es diferente al tener la fuerza F_2 aplicada. Podemos decir, por tanto, que las fuerzas F_{BZ}, F_{Da}, F_{Fb}, F_{Hc}, F_{Jd}, F_{Le}, y F_{OQ} son nulas y las barras correspondientes, BZ, Da, Fb, Hc, Jd, Le, y OQ son barras de fuerza nula.

Para simplificar el problema, y verlo mejor, repetiremos la figura quitando estas barras de fuerza nula (Figura 5.41)

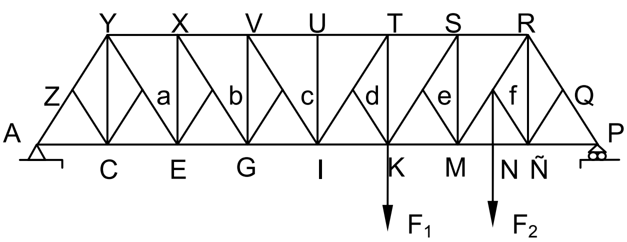

Figura 5.41

Ahora podemos ver que hay más uniones en T sin fuerzas externas, lo que indica que hay más barras de fuerza nula en esta armadura.
Se trata de los nudos Z, a, b, c, d, e, y Q.
El nudo f es diferente, ya que la barra Nf no era de fuerza nula y por tanto no es una unión en forma de T.
Podemos decir, por tanto, que las fuerzas F_{Zc}, F_{Ca}, F_{Eb}, F_{Gc}, F_{Kd}, F_{Me}, y $F_{ÑQ}$ son nulas y las barras correspondientes, Zc, Ca, Eb, Gc, Kd, Me, y ÑQ son barras de fuerza nula.

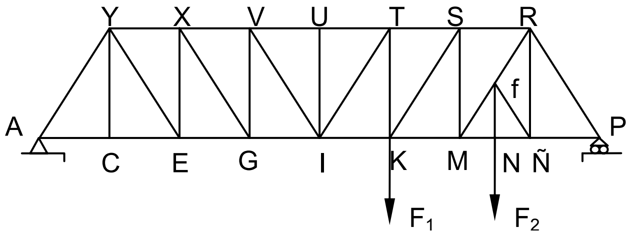

Figura 5.42

Eliminando estas barras de fuerza nula (Figura 5.42) simplificamos aún más el problema.
Para encontrar las fuerzas que nos piden, trabajamos con esta armadura más simple.

2) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa, para encontrar las reacciones en los apoyos (Figura 5.43).

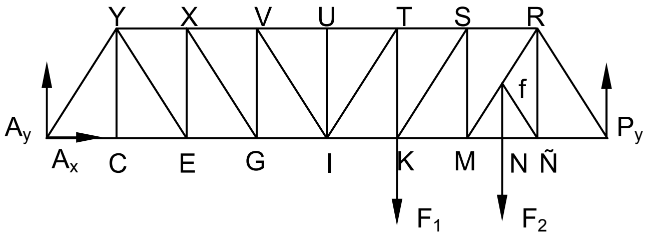

Figura 5.43

$\Sigma F_x = A_x = 0$
$\Sigma F_y = A_y + P_y - F_1 - F_2 = 0$

$\Sigma M_A = (16\text{ m}) \times P_y - (10\text{ m}) \times F_1 - (13\text{ m}) \times F_2 = 0$

de donde,
$(16\text{ m}) \times P_y = (10\text{ m}) \times (5\text{ kN}) + (13\text{ m}) \times (10\text{ kN}) = 180\text{ kN m}$
$P_y = 180\text{ kN m} / 16\text{ m} = 11.25\text{ kN}$
$A_y = -P_y + F_1 + F_2 = -11.25\text{ kN} + 5\text{ kN} + 10\text{ kN} = 3.75\text{ kN}$

3) Una vez obtenidas las reacciones en los apoyos, cortamos la armadura por las barras cuya fuerza nos pide el problema (KL, KT y JK), o por las más próximas a ellas (Figura 5.44).

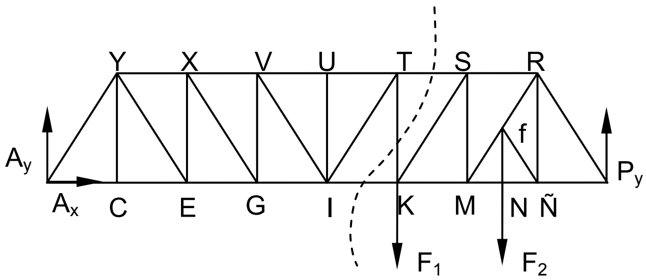

Figura 5.44

Ya que hemos eliminado todas las barras de fuerza nula, los nudos de esas barras (J, L, por ejemplo) no se ven en la figura, y la fuerza en las barras KL o JK son equivalentes a las correspondientes a las barras KM o IK. Al hacer el corte de la armadura hay que tener en cuenta que no se deben cortar más de tres barras para poder resolverlo con las tres ecuaciones del equilibrio.

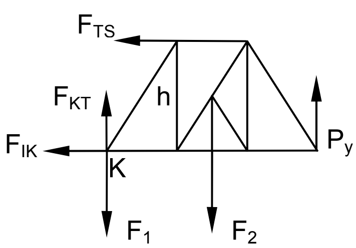

Figura 5.45

A continuación, dibujamos el diagrama de sólido libre de la sección de la armadura que nos interesa (Figura 5.45).

$\Sigma F_x = -F_{IK} - F_{TS} = 0$
$\Sigma F_y = F_{KT} + P_y - F_1 - F_2 = 0$
$\Sigma M_K = (6\text{ m}) \times P_y - (3\text{ m}) \times F_2 + h \times F_{TS} = 0$

y la altura del triángulo (h) se puede obtener por trigonometría:
h = (4 m) x sen60º = 3.464 m.
(3.464 m) x F_{TS} = (3 m) x (10 kN) – (6 m) x (11.25 kN) = – 37.5 kN m
F_{TS} = – 37.5 kN m / 3.464 m = – 10.826 kN
F_{KT} = – P_y + F_1 + F_2 = – 11.25 kN + 5 kN + 10 kN = 3.75 kN
F_{IK} = – F_{TS} = 10.826 kN

Para calcular la fuerza que falta hay que plantear las ecuaciones del equilibrio para el nudo adecuado, el nudo K en este caso (Figura 5.46).

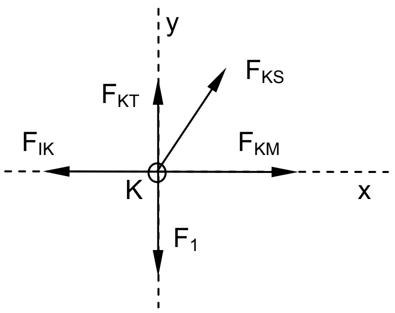

Figura 5.46

ΣF_x = – F_{IK} + (F_{KS} x cos60º) + F_{KM} = 0
ΣF_y = F_{KT} – F_1 + (F_{KS} x sen60º) = 0

de donde
F_{KS} = (F_1 – F_{KT}) / sen60º =
= (5 kN – 3.75 kN) / 0.866 = 1.443 kN
F_{KM} = F_{IK} – (F_{KS} x cos60º) =
= 10.826kN – (1.443 kN x 0.5) = 10.105 kN

Para comprobarlo podemos usar la otra parte de la armadura (Figura 5.47).

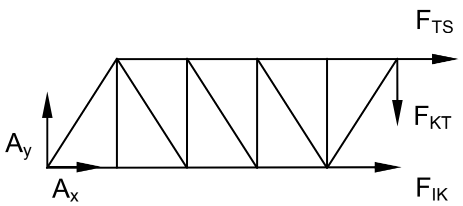

Figura 5.47

ΣF_x = A_x + F_{IK} + F_{TS} = 0
ΣF_y = A_y – F_{KT} = 0
ΣM_A = –(10m) x F_{KT} – h x F_{TS} = 0

comprobamos:
0 + 10.826 kN – 10.826 kN = 0

3.75 kN – 3.75 kN = 0
– (10m) x (3.75 kN) – (3.464 m) x (– 10.826 kN) = – 37.5 + 37.5 = 0

4) Los resultados obtenidos son:
F_{KL} = F_{KM} = 10.105 kN (tracción)
F_{KT} = 3.75 kN (tracción)
F_{JK} = F_{IK} = 10.826 kN (tracción)

Problema 5.10

Para la armadura "Fink" de la Figura 5.48, indicar cuáles son las barras de fuerza nula, y hallar la fuerza en las barras DK, DE y EI.
Considerar los datos siguientes: F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = 5 kN.
Los triángulos BCMB, CPMC, EIQE y EFIE son equiláteros de 2 m de lado, y el triángulo CEKC también es equilátero, de 4 m de lado.

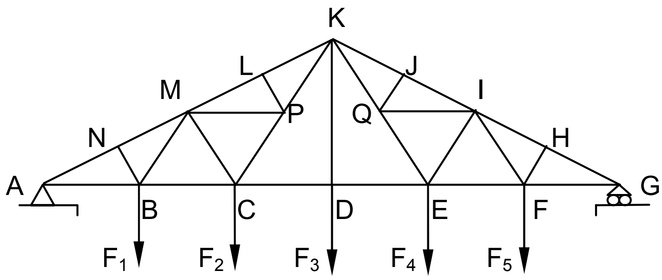

Figura 5.48

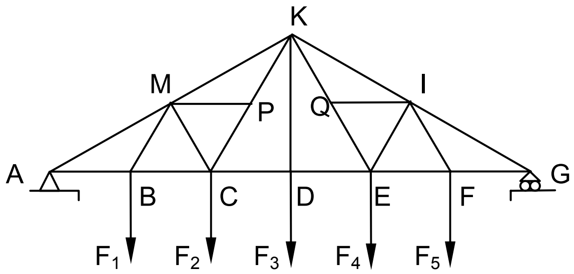

Figura 5.49

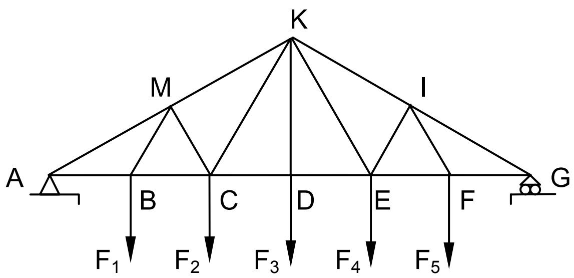

Figura 5.50

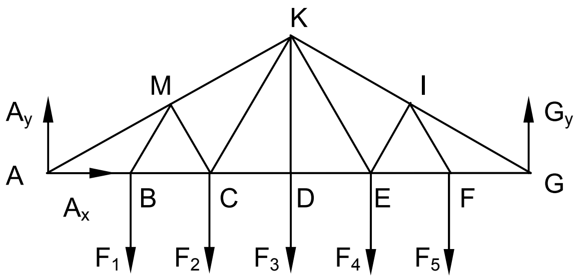

Figura 5.51

Solución

1) Primero buscamos las barras de fuerza nula. Para ello, buscamos uniones en forma de T, sin fuerzas externas aplicadas.

En este caso, tenemos uniones de este tipo en los nudos N, L, J y H. Podemos decir, por tanto, que las fuerzas F_{BN}, F_{PL}, F_{QJ} y F_{FH} son nulas y las barras correspondientes, BN, PL, QJ y FH son barras de fuerza nula.

En la Figura 5.49 repetimos la figura quitando estas barras de fuerza nula.

Ahora podemos ver que hay más uniones en T sin fuerzas externas, lo que indica que hay más barras de fuerza nula en esta armadura. Se trata de los nudos P y Q. Tenemos otras dos fuerzas, F_{PM} y F_{QI}, nulas y las barras correspondientes, PM y QI, son barras de fuerza nula.

Si quitamos estas barras, la armadura quedará como en la Figura 5.50.

2) Dibujamos el diagrama de sólido libre de la armadura completa, para encontrar las reacciones en los apoyos (Figura 5.51).

$\Sigma F_x = A_x = 0$
$\Sigma F_y = A_y + G_y - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 - F_5 = 0$
$\Sigma M_A = (12\text{ m}) \times G_y - (2\text{ m}) \times F_1 -$
$- (4\text{ m}) \times F_2 - (6\text{ m}) \times F_3 - (8\text{ m}) \times F_4 -$
$- (10\text{ m}) \times F_5 = 0$

de donde,

$(12\text{ m}) \times G_y = (2\text{ m}) \times (5\text{ kN}) + (4\text{ m}) \times (5\text{ kN}) + (6\text{ m}) \times (5\text{ kN}) + (8\text{ m}) \times (5\text{ kN}) +$
$+ (10\text{ m}) \times (5\text{ kN}) = 150\text{ kN m}$
$G_y = 150\text{ kN m} / 12\text{ m} = 12.5\text{ kN}$
$A_y = - G_y + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = - 12.5\text{ kN} + (5 \times (5\text{ kN})) = 12.5\text{ kN}$

3) Una vez obtenidas las reacciones en los apoyos, cortamos la armadura por las barras cuya fuerza nos pide el problema (DK, DE y EI), o por las más próximas a ellas.
En este caso podemos cortar por la barra DE o bien por la barra EI, pero no podemos cortar las dos a la vez, como se puede ver en la Figura 5.52.

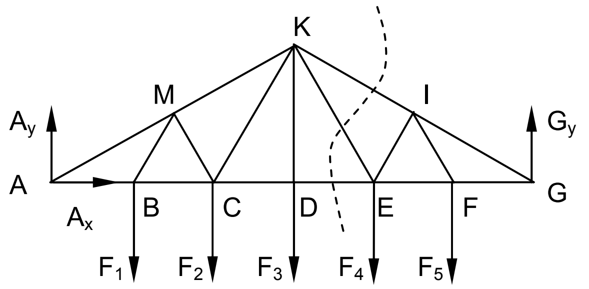

Figura 5.52

A continuación, dibujamos el diagrama de sólido libre de la sección de la armadura que nos interesa (Figura 5.53), para aplicar las ecuaciones del equilibrio.

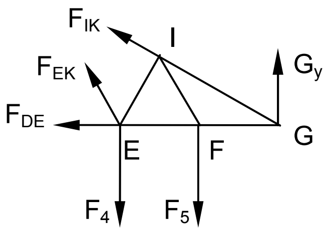

Figura 5.53

$\Sigma F_x = -(F_{IK} \text{ x } \cos30°) - (F_{EK} \text{ x } \cos60°) - F_{DE} = 0$
$\Sigma F_y = (F_{IK} \text{ x } \text{sen}30°) + (F_{EK} \text{ x } \text{sen}60°) + G_y - F_4 - F_5 = 0$
$\Sigma M_E = (4 \text{ m}) \text{ x } G_y - (2 \text{ m}) \text{ x } F_5 + (2 \text{ m}) \text{ x } F_{IK} = 0$

$(2 \text{ m}) \text{ x } F_{IK} = (2 \text{ m}) \text{x } (5 \text{ kN}) - (4 \text{ m}) \text{ x}(12.5 \text{ kN}) = -40 \text{ kN m}$
$F_{IK} = -40 \text{ kN m} / 2 \text{ m} = -20 \text{ kN}$
$F_{EK} \text{ x sen}60° = 2 \text{ x } (5 \text{ kN}) - (12.5 \text{ kN}) + (20 \text{ kN x } 0.5) = 7.5 \text{ kN}$
$F_{EK} = 7.5 \text{ kN} / 0.866 = 8.661 \text{ kN}$
$F_{DE} = -(F_{IK} \text{ x } \cos30°)-(F_{EK} \text{ x } \cos60°) = (20 \text{ kN x } 0.866)-(8.661 \text{ kN x } 0.5) = 12.990 \text{ kN}$

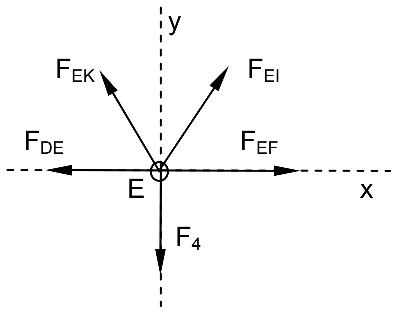

Figura 5.54

Para calcular otra de las fuerzas (F_{EI}) hay que plantear las ecuaciones del equilibrio para el nudo correspondiente, el nudo E en este caso (Figura 5.54).

$\Sigma F_x = -F_{DE} - (F_{EK} \text{ x } \cos60°) + F_{EF} + (F_{EI} \text{ x } \cos60°) = 0$
$\Sigma F_y = (F_{EK} \text{ x sen}60°) + (F_{EI} \text{ x sen}60°) - F_4 = 0$

de donde
$F_{EI} = (F_4 - (F_{EK} \text{ x sen}60°)) / \text{sen}60° =$
$= (5 \text{ kN} - (8.661 \text{ kN x } 0.866)) / 0.866 = -2.887 \text{ kN}$

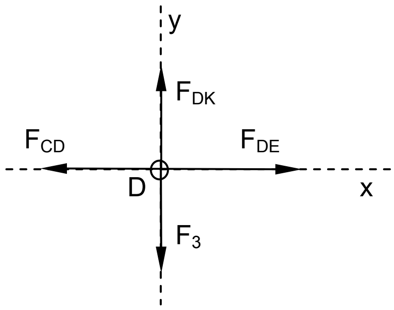

Figura 5.55

Para calcular la fuerza que falta (F_{DK}) hay que plantear las ecuaciones del equilibrio para otro nudo, el nudo D (Figura 5.55).

$\Sigma F_x = -F_{CD} + F_{DE} = 0$
$\Sigma F_y = F_{DK} - F_3 = 0$

de donde
$F_{DK} = F_3 = 5 \text{ kN}$

4) Los resultados obtenidos son:
$F_{DK} = 5$ kN (tracción)
$F_{DE} = 12.990$ kN (tracción)
$F_{EI} = -2.887$ kN (compresión)

5.6.- Problemas propuestos

Problema 5.11

Para la armadura de la Figura 5.56, hallar la fuerza en las barras EF, CF y CB. Considerar los datos siguientes:

F_1 = 6 kN y F_2 = 4 kN
Todos los triángulos que forman la armadura son rectángulos y tienen los dos catetos iguales con una longitud de 2 m cada uno.

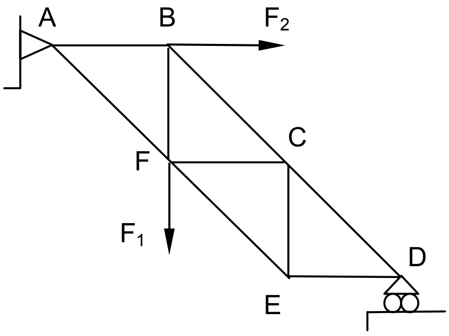

Figura 5.56

Solución
F_{EF} = 2.828 kN (tracción)
F_{CF} = 2.0 kN (tracción)
F_{CB} = – 5.657 kN (compresión)

Problema 5.12

Para la armadura de la Figura 5.57, hallar la fuerza en cada barra. Considerar los datos siguientes:
$F_1 = F_2$ = 5 kN
La longitud de las barras AB, BC, CD, BF y CF es de 2 m.

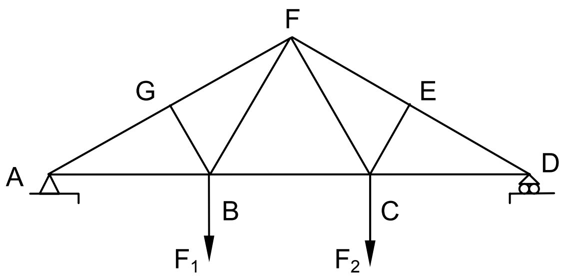

Figura 5.57

Solución
$F_{BG} = F_{CE}$ = 0 kN
F_{BC} = 5.773 kN (tracción)
$F_{AB} = F_{CD}$ = 8.660 kN (tracción)
$F_{BF} = F_{CF}$ = 5.774 kN (tracción)
$F_{AG} = F_{GF} = F_{DE} = F_{EF}$ = – 10.0 kN (compresión)

Problema 5.13

Para la armadura de la Figura 5.58, hallar la fuerza en las barras EF, CE, CD y CF. Considerar los datos siguientes: F_1 = 10 kN. Todos los triángulos que forman la armadura son rectángulos y tienen los dos catetos iguales con una longitud de 2 m cada uno.

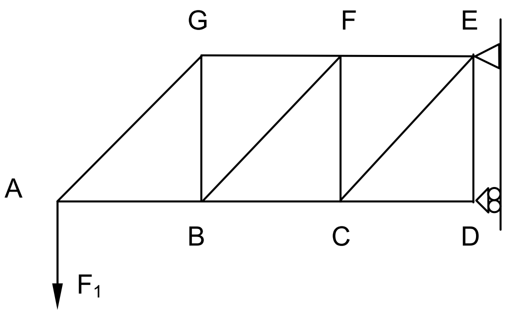

Figura 5.58

Solución
F_{EF} = 20.0 kN (tracción)
F_{CE} = 14.142 kN (tracción)
F_{CD} = – 30.0 kN (compresión)
F_{CF} = – 10.0 kN (compresión)

Problema 5.14

Para la armadura de la Figura 5.59, hallar la fuerza en cada barra. Considerar los datos siguientes: F_1 = 6 kN, F_2 = 3 kN, y la longitud de las barras es de 2 m.

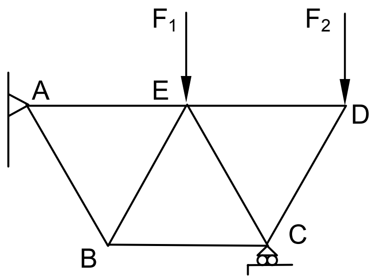

Figura 5.59

Solución
F_{AB} = F_{BC} = 1.155 kN (tracción)
F_{CD} = – 3.464 kN (compresión)
F_{DE} = – 1.732 kN (compresión)
F_{AE} = – 0.577 kN (compresión)
F_{BE} = – 1.155 kN (compresión)
F_{CE} = – 5.774 kN (compresión)

Problema 5.15

Para la armadura de la Figura 5.60, hallar la fuerza en las barras EI, ED y HI. Considerar los siguientes datos:

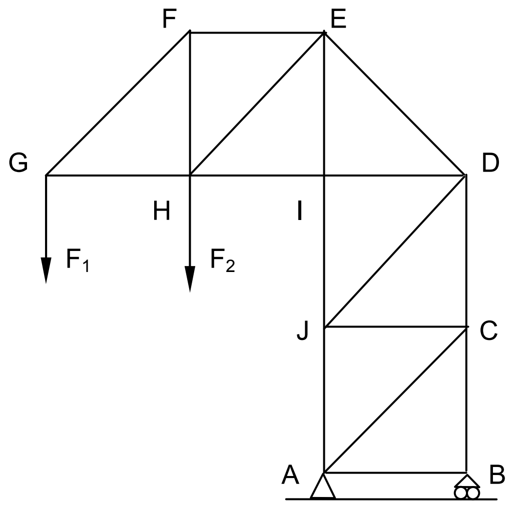

Figura 5.60

F_1 = 4 kN,
F_2 = 6 kN
Todos los triángulos que forman la armadura son rectángulos y tienen los dos catetos iguales con una longitud de 2 m cada uno.

Solución
F_{EI} = – 24.0 kN (compresión)
F_{ED} = 19.799 kN (tracción)
F_{HI} = – 14.0 kN (compresión)